УДК 539.3

О.М. Чемерис доц.
НТУ України «Київський політехнічний інститут», м.Київ, Україна

НЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ СТИСНУТИХ КРУГЛИХ ПЛАСТИН З КОВЗНОЮ ОПОРОЮ

Круглая цельная пластинка со скользящей заделкой равномерно сжата по контуру погонной нагрузкой. Составлены частотные уравнения и уравнения для определения положения узловых окружностей при $s = 0,1..4$ *для симметричных и несимметричных изгибных колебаний. Проведены расчёты частот и форм в случае, когда число узловых диаметров* $n = 0,1..3$*, а число узловых окружностей* $s = 0,1..4$.

Circular solid plate with sliding rigid support was compressed by linear load in the line of contour uniformly. Frequencies and forms of symmetrical and unsymmetrical bending vibrations were equated. Frequencies values and forms were calculated in the event that number of node diameter n=0,1...3 and number of node circles s=0,1...4.

Вступ

Круглі пластинки використовуються в різного типу конструкціях в вигляді діафрагм, днищ, пружин. Досить часто використовують схему з ковзною опорою, коли защемлений контур вільно зміщується по нормалі. Для раціонального проектування таких пластин необхідно знати такі динамічні характеристики як частоти і форми коливань. Частоти симетричних коливань для пластинок з ковзною опорою визначені в роботі [1] і приведені в [2]. Для стиснутих шарнірно закріплених пластин частоти і форми коливань розглядалась в роботі [3] ,а результати рішення приведені в [4]. Частоти коливань і положення вузлових діаметрів для стиснутої пластинки з ковзною опорою для симетричних і несиметричних форм коливань не визначались.

Мета досліджень.

Розглядається цільна кругла пластинка у якої кругова кінцева опора защемлена для кутових переміщень і може вільно зміщуватись по нормалі до її поверхні. В площині пластинка по контуру навантажена погонним сталим тиском. Визначаються частоти коливань для різних форм симетричних і несиметричних коливань при різній величині стискаючих чи розтягнутих сил. Для кожного типу коливань визначається положення вузлових діаметрів.

Основна частина

Рівняння коливань стиснутої круглої пластинки матиме такий вигляд [5]

$$D\nabla^4 w + N\nabla^2 w + \gamma h a^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

де
$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial}{\rho\cdot\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2\partial\theta^2}\right)^2$$

де, *r*- відстань від центра до точки пластинки, θ - кутова координата точки,
w- нормальне переміщення, *h*- товщина пластинки,t-час, γ - густина, *N*- сила, що діє в площині пластинки на одиницю довжини контура, $D=Eh^3/12(1-\mu^2)$- циліндрична жорсткість при згині пластинки, *E*-модуль Юнга, μ- коефіцієнт Пуассона, а- радіус пластинки, $\rho = \frac{r}{a}$

Рішення рівняння (1) приймемо в такій формі

$$w(\rho,\theta,t) = X_n(\rho)\cdot \cos n\theta \cdot \cos\omega t$$

де ω –кругова частота коливань, n-число хвиль по периметру кола пластинки

Рівняння (1) прийме вигляд

$$\nabla_1{}^4 X_n(\rho) + \alpha^2 \cdot \nabla_1{}^2 X_n(\rho) - \frac{m \cdot n^2 \cdot \omega^2 \cdot a^4}{D} \cdot X_n(\rho) = 0 \,, \qquad (2)$$

де $\alpha^2 = N/D,$

Нехай

$$k^4 = \frac{m \cdot n^2 \cdot a^4 \cdot \omega^2}{D} \,,$$

$$\nabla_1{}^4 = (\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \cdot \partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2})^2$$

Рівняння (2) можна записати в такій формі

$$(\nabla_1{}^2 + \beta_1^2) \cdot (\nabla_1{}^2 - \beta_2^2) X_n(\rho) = 0 \qquad (3)$$

де

$$\beta_1^2 = 0.5(\sqrt{\alpha^2 + 4k^2} - \alpha^2$$

$$\beta_2^2 = 0.5(\sqrt{\alpha^2 + 4k^2} + \alpha^2$$

Рівняння (3) має таке рішення

$$X_n(\rho)=C_1 I_n(\beta_1 \rho) + C_2 J_n(\beta_2 \rho)+C_3 K_n(\beta_1 \rho)+C_4 Y_n(\beta_2 \rho) \qquad (4)$$

де$_i$ –C_i сталі інтегрування, $I_n(\beta_1 \rho)$, $Y_n(\beta_1 \rho)$ $J_n(\beta_2 \rho)$ $K_n(\beta_2 \rho)$ - циліндричні функції Бесселя дійсного і чисто уявного аргумента першого і другого роду, порядок яких визначається індексом n.

Для визначення похідних функції $J_n(\rho)$ маємо такі залежності:

$$\frac{dJ_n(\rho)}{d\rho} = J_{n-1}(\rho) - \frac{nJ_n(\rho)}{\rho}$$

$$\frac{d^2 J_n(\rho)}{d\rho^2} = (\frac{n^2 - n}{\rho^2} - 1) J_n(\rho) + \frac{J_{n+1}(\rho)}{\rho}$$

Похідні модифікованої функції Бесселя першого роду $I_n(r)$ знаходяться із співвідношень:

$$\frac{dI_n(r)}{d\rho} = I_{n-1}(\rho) - \frac{nI_n(\rho)}{\rho}$$

$$\frac{d^2 I_n(\rho)}{d\rho^2} = (\frac{n^2 - n}{\rho^2} + 1) J_n(\rho) - \frac{J_{n+1}(\rho)}{\rho}$$

Граничні умови:

$$W'(1) = 0;$$

$$W'''(\rho) + \frac{W''(\rho)}{k} + \frac{(3-\mu) n^2 W}{k^3} = 0$$

Для цільної пластинки C_3,C_4=0.Підставляємо (4) в (5) і одержимо однорідну систему рівня відносно C_1 та C_2.Прирівнюємо до нуля визначник даної системи і знаходимо частотне рівняння

$$(u^2 + v^2) J_n(v) I_n(u) - (1-\mu) \cdot$$

$$\cdot [v J_{n+1}(v) I_n(u) + u J_n(v) I_{n+1}(u)] = 0$$

де:

$$a\beta_1 = u, a\beta_2 = v, \alpha a = m \,,$$

$$v = \sqrt{u^2 + m^2} \;; \qquad (5)$$

$$k^2 = 0.5\sqrt{(u^2 + v^2)^2 - m^4}$$

Для пониження порядку функцій Бесселя маємо такі співвідношення:

$$J_2(\rho) = 2\frac{J_1(\rho)}{\rho} - J_0(\rho)$$

$$I_2(\rho) = -2\frac{I_1(\rho)}{\rho} + I_0(\rho)$$

Для симетричної форми коливань *(n=0)* знаходимо параметр u, із частотного рівняння

$$J_1(\sqrt{u^2+m^2})=0$$

По формулам (5) знаходимо частотні параметри v, k^2 (таблиця 1).Положення вузлових діаметрів знаходимо із умови

$$root(w_n(\rho),\rho,\rho_1,\rho_2) \tag{6}$$

де
$$w_0(\rho)=J_0(\rho v)+\frac{J_1(v)v}{I_1(u)u}I_0(\rho u)$$

Для несиметричних форм коливань корні u знаходимо із умови

$$root(\xi(u,u,u_1,u_2) \tag{7}$$

$$\xi_n(u)=\alpha_n(u)+\beta_n(u)+\gamma_n(u)+\delta_n(u)$$

де при *n=1*

$$\alpha_1(u)=-2(2u^2+m^2)J_1(\sqrt{u^2+m^2})I_1(u)$$

$$\beta_1(u)=[-J_0(\sqrt{u^2+m^2})+\frac{2J_1(\sqrt{u^2+m^2})}{\sqrt{u^2+m^2}}]\times$$

$$\times I_1(u)[2.7+\sqrt{u^2+m^2}(0.7+u^2)+(\sqrt{u^2+m^2})^3]$$

$$\gamma_1(u)=[I_0(u)-\frac{2I_1(u)}{u}]\cdot J_1(\sqrt{u^2+m^2})\times$$

$$\times[-u^3+(0.7-u^2-m^2)u-2.7]$$

$$\delta_1(u)=[-J_0(\sqrt{u^2+m^2})+\frac{2J_1(\sqrt{u^2+m^2}}{\sqrt{u^2+m^2}}]\times$$

$$\times[I_0(u)-\frac{2I_1(u)}{u}]\cdot[2.7(u+\sqrt{u^2+m^2}]+$$

$$+u(\sqrt{u^2+m^2})(2u^2+m^2)$$

Положення вузлових діаметрів знаходимо із умови (6) , коли

$$w_1(\rho)=J_1(\rho v)-\frac{J_0(v)\cdot v-J_1(v)}{I_0(u)u-I_1(u)}I_1(\rho u)$$

при *n=2*

$$\alpha_2(u)=-8(2u^2+m^2)[I_0(u)-\frac{2}{u}I_1(u)]\cdot$$

$$\cdot[-J_0(\sqrt{u^2+m^2})+\frac{2J_1(\sqrt{u^2+m^2})}{\sqrt{u^2+m^2}}]$$

$$\beta_2(u)=(I_0(u)-\frac{2}{u}I_1(u))[\frac{-4}{\sqrt{u^2+m^2}}J_0(\sqrt{u^2+m^2})+$$

$$+(-1+\frac{2}{u^2+m^2})J_1(\sqrt{u^2+m^2})]\times$$

$$\times[2(\sqrt{u^2+m^2})^3+2.8\sqrt{u^2+m^2}+2u^2\sqrt{u^2+m^2}$$

$$\gamma_2(u)=[-J_0(\sqrt{u^2+m^2})+\frac{2J_1(\sqrt{u^2+m^2})}{\sqrt{u^2+m^2}}]\times$$

$$\times[(1+\frac{8}{u^2})I_1(u)-\frac{4}{u}I_0(u)]\times$$

.

$$\times[-2u^3+2.8u-2u(u^2+m^2)-8.8]$$

$$\delta_2(u) = [\frac{-4}{\sqrt{u^2+m^2}} J_0(\sqrt{u^2+m^2}) +$$
$$(-1+\frac{2}{u^2+m^2})J_1(\sqrt{u^2+m^2})] \cdot$$
$$\cdot[(1+\frac{8}{u^2})I_1(u) - \frac{4}{u}I_0(u)] \cdot$$
$$\cdot[10.8(u+\sqrt{u^2+m^2}+u(\sqrt{u^2+m^2})(2u^2+m^2)]$$

Положення вузлових діаметрів знаходимо із умови (6), де

$$w_2(\rho) = [-J_0(\rho v) + \frac{2J_1(\rho v)}{\rho v}] -$$
$$-\frac{J_1(v)(v-\frac{4}{u}) + 2J_0(v)}{I_1(u)(u+\frac{4}{u}) - 2I_0(u)} \times$$
$$\times[I_0(u\rho) - \frac{2}{\rho u}I_1(u\rho)]$$

Таблиця 1

n	s	m	u	v	k^2	ρ
1	2	3	4	5	6	7
		0	3.8317	3.8317	14.6819	0.6276
		1	3.6989	3.8317	14.1730	0.6276
	1	2	3.2683	3.8317	12.5231	0.6276
		3	2.3837	3.8317	9.1337	0.6276
		3.8317	0.0011	3.8317	0.0042	0.6276
		0	7.0156	7.0156	49.2186	0.7868 ; 0.3428
		2	6.7245	7.0156	47.1765	0.7868 ; 0.3428
0	2	4	5.7635	7.0156	40.4341	0.7868 ; 0.3425
		6	3.6357	7.0156	25.5065	0.7868 ; 0.3425
		7.0156	0.0011	7.0156	0.0070	0.7709 ; 0.3535
		0	10.1735	10.1735	103.500	0.2364;0.5426;0.8506
		3	9.7211	10.1735	98.8975	0.2364;0.5426;0.8506
	3	6	8.2158	10.1735	83.5831	0.2364;0.5425;0.8506
		9	4.7434	10.1735	48.2569	0.2364;0.5425;0.8506
		10.1735	0.0372	10.1735	0.2493	0.235;0.5446;0.8486
		0	1.9945	1.9945	3.9780	
	0	1	1.7356	2.0031	3.4765	
		2	0.5224	2.0671	1.0799	
		2.095	0.0012	2.095	0.0025	
		0	5.3659	5.3659	28.7929	0.7127
	1	2	4.9882	5.3686	26.7476	0.7119
		4	3.6033	5.3837	19.3989	0.6968
1		5.5063	0.0011	5.063	0.0061	0.6959
		0	8.5501	8.5501	73.1042	0.8202 ; 0.4482
	2	6	6.0996	8.5560	51.8182	0.8188 ; 0.4480
		8	3.0922	8.5768	26.5212	0.8103; 0.4487
		8.6506	0.001	8.6506	0.0087	0.7396;0.4534
		0	11.7133	11.7133	137.2015	0.8684; 0.599; 0.3271
	3	6	10.0614	11.7146	117.8652	0.8682; 0.5989; 0.3271
		10	6.1132	11.7206	71.6515	0.8669; 0.5988; 0.3269
		11.7904	0.0012	11.7904	0.0141	0.7968; 0.6403.0.3103

Продовження табл.1

n	s	m	u	v	k^2	ρ
1	2	3	4	5	6	7
2	0	0	3.5251	3.5251	12.4269	
		2	2.9157	3.5357	10.3091	
		3	1.917	3.5602	6.8249	
		3.626	0.001	3.626	0.0026	
	1	0	6.8157	6.8157	46.4538	0.7509
		3.5	5.8605	6.8261	40.0043	0.7483
		6	3.3561	6.8748	26.0079	0.7326
		6.985	0.0011	6.985	0.007	0.6827
	2	0	10.0183	10.0183	100.3663	0.8392; 0.5127
		6	8.034	10.0272	80.5587	0.8283; 0.5117
		9	4.4966	10.0608	45.2393	0.8283; 0.5117
		10.1648	0.001	10.1648	0.0102	0.7753; 0.5248
	3	0	13.1977	13.1977	174.1793	0.88; 0.6378; 0.3891
		8	10.5037	13.2033	138.6837	0.8792;0.6376; 0.389
		15	6.5972	16.3867	108.105	0.8999;0.7099;0.3143
		16.4687	0.001	16.4687	0.3684	0.8841;0.714;0.3129

В випадку розтягування пластинки в наведених вище формулах (6) і (7) міняємо містами величини u та $v = \sqrt{u^2 + m^2}$

Частотні характеристики u , v , k^2 та параметр ρ, що характеризує положення вузлових діаметрів для розтягнутих пластин ,приведені в таблиці 2.

Таблиця 2

n	s	m	u	v	k^2	ρ
0	1	0	3.8317	3.8317	14.6819	0.6276
		-1	3.8317	3.96	15.1737	0.6276
		-2	3.8317	4.3223	16.5616	0.6276
		-3	3.8317	4.8664	18.6466	0.6276
		-4	3.8317	5.5391	21.2243	0.6276
	2	0	7.0156	7.0156	49.2186	0.7868 ; 0.3428
		-2	7.0156	7.2951	51.1796	0.7868 ; 0.3428
		-4	7.0156	8.0756	56.6566	0.7868 ; 0.3425
		-6	7.0156	9.2314	64.7633	0.7868 ; 0.3425
		-7	7.0156	9.9105	69.5283	0.7838 ; 0.3448
	3	0	10.1735	10.1735	103.500	0.2364;0.5426;0.8506
		-3	10.1747	10.60	104.9057	0.2364;0.5426;0.8506
		-6	10.1735	11.811	120.1594	0.2364;0.5426;0.8506
		-9	10.1735	13.5831	138.1875	0.2364;0.5426;0.8506
		-10	10.1735	14.2653	145.128	0.2364;0.5426;0.8506
1	0	0	1.9945	1.9945	3.9780	
		-1	2.0504	2.2815	4.7667	
		-2	2.1778	2.9568	6.4394	
		-3	2.3041	3.7827	8.7158	
	1	0	5.3659	5.3659	28.7929	0.7124
		-2	5.3834	5.7429	30.9164	0.7119
		-4	5.4266	6.7415	36.5835	0.6968
		-5	5.4552	7.3975	40.3305	0.6959
	2	0	8.5501	8.5501	73.1042	0.8202 ; 0.4482
		-6	8.5891	10.9772	89.9901	0.8188;0.448
		-8	8.6109	11.7536	101.209	0.8103;0.4487
		-9	8.6216	12.4632	107.4529	0.7896;0.4534
	3	0	11.7133	11.7133	137.2015	0.8684;0.599;0.3271

Продовження табл.2

n	*s*	*m*	*u*	*v*	k^2	*ρ*
		-6	11.7308	13.1762	154.567	0.8682;0.5989;0.3271
		-10	11.754	15.4323	181.3915	0.8669;0.5988;0.3269
		-12	11.7661	16.806	197.741	0.7968;0.6403;0.3103
2	0	0	3.5251	3.5251	12.4269	
		-2	3.4611	3.9974	13.8359	
		-3	3.4237	4.5521	15.5851	
		-4	3.4024	5.2513	17.8671	
		-6	3.8383	6.8906	23.3475	
		-10	3.3867	10.5579	35.7565	
	1	0	6.8157	6.8157	46.4538	0.7509
		-3.5	6.7944	7.6429	51.9289	0.7543
		-6	6.7752	9.0501	61.3159	0.7572
		-10	6.7595	12.07	81.5888	0.7596
	2	0	10.0183	10.0183	100.3663	0.8392;0.5127
		-6	10.005	11.6667	116.722	0.8408;0.5133
		-9	0.9977	13.4519	134.458	0.8419;0.5137
		-12	9.9929	15.616	156.049	0.8422;0.5139
	3	0	13.1977	13.1977	174.1793	0.8803;0.6374;0.3897
		-8	13.1897	15.4262	203.4672	0.8808;0.6382;0.3894
		-10	13.1873	16.55	218.252	0.881;0.6383;0.3894
		-12	13.1832	19.9699	263.2671	0.8814;0.6385;0.3896

Висновки

1.Складено рівняння для визначення частотного параметра стиснутої та розтягнутої пластинки р ковзною опорою при різних значеннях вузлових діаметрів *(n=0,1,2)*.

2.Проведені результати розрахунків частотного параметра к при різних значеннях вузлових діаметрів *(n=0,1,2)*.і при різних числах вузлових кілець *(s=1,2,3)*.

3.Визначено положення вузлових діаметрів.

4.Визначено форми коливань стиснутої та розтягнутої пластинки при симетричних та несиметричних коливаннях.

5.Частоти і форми коливань та положення вузлових діаметрів можуть бути використані на стадії проектування конструкцій , які мають елементами стиснуті чи розтягнуті круглі пластинки.

Список літератури

1. 1.Сахаров И.Е.Динамические жёсткости в теории осесимметричных колебаний круглых и кольцевых пластинок, Известия АН СССР,Механика,№5,1959.
2. 2.Справочник по динамике сооружений. Под ред.Б.Г.Коренева,И.М.Рабиновича.-М:Стройиздат,1972,-511с.
3. 3.Коренев В.Г.Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности ,решаемые в
4. бесселевых функциях.-М:Физматгиз,1969,-358с.